Web版 ISSN 2189-0803 DVD版 ISSN 2189-079X

20pS12-7

ディラック場の宇田方程式へ向けて

www.GrammaticalPhysics.ac
宇田雄一

Toward Uda Equation of Dirac Field

www.grammaticalphysics.ac
Yuichi Uda

X, Y を 2 つのエルミート演算子とし、代数を Z = X + iY, ZZ + ZZ = 0, ZZ† + Z†Z = 1 で定義し、ハミルトニアンが H = aZ†Z である量子力学系を扱う。Z†Z の固有値は 0 と 1 の 2 つだけだ。Z†Z |0> = 0|0>, Z†Z |1> = 1|1>とすると、時刻 t での量子状態は $\phi(0,t)|0> + \phi(1,t)|1>$と書ける。これにシュレディンガー方程式を適用すると、

$$i\hbar(d/dt)[\phi(0,t)|0> + \phi(1,t)|1>] = aZ^\dagger Z[\phi(0,t)|0> + \phi(1,t)|1>]$$

$$\therefore\ i\hbar(d/dt)\phi(0,t) = 0,\ i\hbar(d/dt)\phi(1,t) = a\phi(1,t).$$

ここまでは旧文法による記述です。この系の宇田方程式を発表します。その 1 つは

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\left[\frac{i\hbar}{\alpha}\cdot\frac{d\nu(t)}{dt}\cdot\frac{\Delta}{\Delta\nu(t)} + a\nu(t)\right]\Phi[\nu] = 0$$

です。ただし ν は値が 0 または 1 である様な関数で、Φ は複素数値汎関数であり、

$$\frac{\Delta}{\Delta\nu(a)}\Phi[\nu] \equiv \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\Phi[\nu'']-\Phi[\nu']}{\varepsilon}.$$

$$t < a \text{ or } t > a+\varepsilon \Rightarrow \nu'(t) = \nu''(t) = \nu(t).$$

$$a \leqq t \leqq a+\varepsilon \Rightarrow \nu'(t) = 0 \text{ and } \nu''(t) = 1.$$

という風に定義しておきます。宇田方程式のもうひとつの形は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, Z^\dagger(t)\left(-i\hbar\frac{d}{dt} + a\right)Z(t)\,|\Phi> = 0$$

です。ただし、こちらでは代数として

$$Z(t)Z^\dagger(t') + Z^\dagger(t')Z(t) = \delta(t-t'),\quad Z(t)Z(t') + Z(t')Z(t) = 0$$

という条件を併用します。以上が今回の発表内容ですが、この考え方を使うと、

$$\phi_\alpha(x)\phi^\dagger_\beta(y) + \phi^\dagger_\beta(y)\phi_\alpha(x) = \delta_{\alpha\beta}\delta^4(x-y),$$

$$\phi_\alpha(x)\phi_\beta(y) + \phi_\beta(y)\phi_\alpha(x) = 0$$

という代数を設定すれば自由ディラック場の宇田方程式を

$$\int d^4x\,\phi^\dagger(x)\gamma^0(-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc)\phi(x)\,|\Phi> = 0$$

という形に書ける事が判明し、この事は 2019 年 05 月 15 日 15 時までに WWW 上で私によって公開されました。