宇田方程式の厳密解(3)

www.GrammaticalPhysics.ac
宇田雄一

Exact Solution of Uda Equation (3)

www.grammaticalphysics.ac
Yuichi Uda

1 次元調和振動子に出来るだけ似た系に対する宇田方程式の解を求めてみた。V を与えて解を求めるのは一般に困難過ぎるので、汎関数を与えてそれを解に持つ宇田方程式の V を求める、という方針を取った。$\Delta(t_1, t_2) = \Delta(t_2, t_1)$ として

$$\Phi[\chi] = \exp\left[\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2\, \Delta(t_1, t_2)\chi(t_1)\chi(t_2)\right].$$

この形の汎関数Φを解に持つ宇田方程式の V が実数値汎関数として存在する為には概見上は、$\Delta(t_1, t_2)$が純虚数でありかつ$\Delta(t, t)$が実数である事が[したがって$\Delta(t, t)=0$ である事が]必要だ、と言える。しかし、その様な解に対応する V は、谷型ではなく山型のポテンシャルを表すので、調和振動子のポテンシャルとは異なり過ぎる。$\Delta(t_1, t_2)$が t_1-t_2 のみの関数である場合に限れば、$\Delta(t_1, t_2)$は実数でも構わないが、それでも発散を避けたければ$\Delta(t, t)=0$ である必要が有る。$\Delta(t_1, t_2)=-A(t_1-t_2)^2\exp[-B(t_1-t_2)^2]$, $A > 0$, $B > 0$ という条件で定義される汎関数Φを解に持つ宇田方程式の V は以下である事が分かった。

$$V[\chi] = \frac{\hbar^2}{8m\alpha^2} A^2 \sqrt{\frac{\pi}{2B}} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2\, \chi(t_1)\chi(t_2)\left\{\left[(t_1-t_2)^2 - \frac{1}{B}\right]^2 + \frac{2}{B^2}\right\}\exp\frac{-B(t_1-t_2)^2}{2}.$$

$\Delta(t_1, t_2)=-A[\delta(t_1-t_2-\varepsilon)+\delta(t_2-t_1-\varepsilon)]$としても同様だが $\varepsilon=0$ は禁止される。
$\Delta(t_1, t_2)=-A\exp[-B(t_1-t_2)^2]$の場合には$V[\chi]$が、有限の定数を$-\infty$から$\infty$まで時間で積分する項(発散する)を含んでしまう。$V[\chi]=(k/2)\int_{-\infty}^{\infty}dt[\chi(t)]^2$ とする(調和振動子と正確に一致するポテンシャルを作る)為には$\Delta(t_1, t_2)=-A\delta(t_1-t_2)$とする必要が有るが、これだと $V[\chi]$は$\delta(0)$という無限大の(定義すらされない)定数を$-\infty$から∞まで時間で積分する項(発散する)を含んでしまう。この発散は V 中の定数項(旧文法の状態ベクトルの位相因子)においてのみ生じるから許容されるかもしれない。宇田方程式は以下の方程式だ。

$$\left\{\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left[-\frac{i\hbar}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\delta\chi(t)} - m\frac{d\chi(t)}{dt}\right]^2 - S[\chi]\right\}\Phi[\chi] = 0.$$

ただし $S[\chi] \equiv -V[\chi] + \frac{m}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left[\frac{d\chi(t)}{dt}\right]^2$ です。