日本物理学会 第71回年次大会（2016年）概要集　　Web版 ISSN 2189-0803　DVD版 ISSN 2189-079X

19aAG-2

離散化された宇田方程式の解

www.GrammaticalPhysics.ac
宇田雄一

A Solution of the Discretized Uda Equation

www.grammaticalphysics.ac
Yuichi Uda

$V = 0$ の場合の宇田方程式(日米物理学会合同 2006 年秋季大会):

$$\frac{i\hbar}{\alpha}\cdot\frac{\partial\Phi[\chi(\square-\varepsilon)]}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}=\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}dt\left[\frac{-i\hbar}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\delta\chi(t)}\right]^2\Phi[\chi]$$

を、時間を円環(日本物理学会 2010 年秋季大会 12aSC-9)にせず直線時間のまま $1/\alpha$ 刻みに離散化する近似で、扱います。宇田方程式は、量子歴史を表す汎関数 Φ に課せられる方程式であり、$\chi(\square-\varepsilon)$は、$[\chi(\square-\varepsilon)](t)\ \equiv\ \chi(t-\varepsilon)$ という風に定義される関数です。

本来 χ は関数、Φ は汎関数ですが、これらの代わりに、変数:

$$\chi_k=\ \chi(k/\alpha)\quad(k\in\mathbf{Z})$$

および、これを変数とする関数:

$$\Phi(\chi)=\ \Phi(\cdots,\chi_{-2},\ \chi_{-1},\ \chi_0,\ \chi_1,\ \chi_2,\ \cdots)$$

を用いる事によって、離散化された条件を作ります。

Φ を求める為に、次の変数変換をしました。

$$\Phi(\chi)=F(a_1(\chi),b_1(\chi),a_2(\chi),b_2(\chi),a_3(\chi),b_3(\chi),\ \cdots)$$

$$a_n(\chi)\ \equiv\ \Sigma_{k=-\infty}^{\ \infty}\chi_k\cos(k\pi/n)\quad(n\in\mathbf{N})$$

$$b_n(\chi)\ \equiv\ \Sigma_{k=-\infty}^{\ \infty}\chi_k\sin(k\pi/n)\quad(n\in\mathbf{N})$$

すると、冒頭の方程式の離散近似は、次の様に成ります。

$$\Sigma_{n=1}^{\ \infty}[(\partial/\partial a_n)^2+(\partial/\partial b_n)^2-(\beta a_n-\ \gamma b_n)\partial/\partial a_n-(\beta b_n+\ \gamma a_n)\partial/\partial b_n]F=0$$

ただし、$\beta\equiv\{4m\alpha/[(i\hbar)(2N+1)]\}[\cos(\pi/n)-1]$, $\gamma\equiv\{4m\alpha/[(i\hbar)(2N+1)]\}\sin(\pi/n)$ です。

この方程式が

$$F(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\ \cdots)=f(a_n,b_n)$$

という形の特殊解を持つ事は明らかなので、それを求めると、以下のごとくでした。

$$f(\xi,\eta)=-2\pi\ \beta\ \lambda 0$$
$$\quad+(-2\beta^3)^{1/2}\Sigma_{k=-\infty}^{\ \infty}\lambda_k\int_0^{2\pi}d\theta(-i\xi\cos\theta-i\eta\sin\theta-i\gamma k+2\beta)\exp(ik\theta+\Theta^2)\int_\Theta^\infty dr\exp(-r^2)$$

ただし $\Theta\ \equiv\ (-\beta/2)^{1/2}(-i\xi\cos\theta-i\eta\sin\theta-i\gamma k+2\beta)$ です。

途中で、$x\ \to\ \infty$ で $\sin x\ \to\ 0$ という風に処理したり、被積分関数の性質が良くないのに部分積分を使ったり、変数が実でないのにガウス積分を無頓着に使用している点が、本稿の暗い部分です。