ISSN 2189-0803

22aDG-6

宇田方程式の多体量子力学描像

宇田雄一

Many-body Quantum Mechanics Picture of Uda Equation

www.GrammaticalPhysics.ac

Yuichi Uda

日本物理学会 2014 年秋季大会 20pSE-2 で私によって発表された力学系を規定するハミルトニアンは、量子力学においては次の H だ。

$$H = H_0 + H_1 \begin{cases} H_0 \equiv \dfrac{1}{2m\varepsilon\alpha^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [(P^k)^2 + m\alpha(P^k X^k + X^k P^k)] \\ H_1 \equiv -\dfrac{1}{\varepsilon\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P^k X^{k+1} \end{cases}$$

$(P^k)^2 + m\alpha(P^kX^k + X^kP^k)$ の固有ベクトルの座標表示 u が固有値 e に属する事を表す式は、

$$\left[\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2 - i\hbar m\alpha\left(1 + 2x\frac{d}{dx}\right)\right]u(x) = e\,u(x)$$

この方程式を解くと、次の解が得られた。

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \begin{cases} 2\hbar^2 a_2 + (e + i\hbar m\alpha)a_0 = 0 \\ \hbar^2(n+2)(n+1)a_{n+2} + [e + i\hbar m\alpha(2n+1)]a_n = 0 \ (n \geqq 1) \end{cases}$$

$(a_0, a_2, a_4, \cdots)$と$(a_1, a_3, a_5, \cdots)$は完全に独立なので、各 e の固有空間は次の 2 つの関数を座標表示に持つ 2 つのベクトルによって張られる 2 次元空間だ、と分かる。

$$u_{e1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}(e)x^{2n+1}, \quad u_{e2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(e)x^{2n}$$

全空間の基底ベクトルとして、座標表示が $\prod_{k=-\infty}^{\infty} u_{e(k)i(k)}(x^k)$ という直積で表される物を採用すれば、一般のベクトルは

$$\Phi[x] = \left(\prod_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} de_s \sum_{i(s)=1}^{2}\right) A[e,i] \prod_{k=-\infty}^{\infty} u_{e(k)i(k)}(x^k)$$

という風に展開され、H の固有値ゼロに属する固有ベクトルを求める問題は、$H\Phi = 0$ を成り立たせる A を求める問題に帰着する。$H = H_0 + \beta H_1$, $A[e,i] = \sum_{r=0}^{\infty} \beta^r A_r[e,i]$ と置いて摂動法を使うと、次の特殊解が得られた。

$$A_0[e,i] = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \delta(e_k)$$

$$A_1[e,i] = 2m\alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{e_k + e_{k+1}} [\cdots \delta(e_{k-1})\eta_{3-i(k)}(0, e_k)\xi_{3-i(k+1)}(0, e_{k+1})\delta(e_{k+2})\cdots]$$

ただし、$x\,u_{ei}(x) = \int de'\,\xi_i(e, e')u_{e',3-i}(x)$, $-i\hbar(d/dx)u_{ei}(x) = \int de'\,\eta_i(e, e')u_{e',3-i}(x)$ とする。