20pSE-2　　新文法版量子論の離散化古典描像

www.GrammaticalPhysics.ac　　ウェブマスター　宇田雄一

A Discretized Classical Model
of the New Grammar Version of Quantum Theory

Yuichi Uda

直線時間の場合の自由粒子の新文法版シュレディンガー方程式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{1}{2m}\left[-\frac{i\hbar}{\alpha}\frac{\delta}{\delta\chi(t)} - m\frac{d\chi(t)}{dt}\right]^2 - \frac{m}{2}\left[\frac{d\chi(t)}{dt}\right]^2 \right\}\Phi[\chi]=0$$

も、エネルギー固有値ゼロの定常状態を決める旧シュレディンガー方程式と同じ形をしているので、Φより左に書かれている部分をハミルトニアンと見なして、それの古典力学を解く。時間を離散化すると、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon \left\{ \frac{1}{2m}\left(-\frac{i\hbar}{\alpha}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\chi(k\varepsilon)} - m\frac{\chi(k\varepsilon+\varepsilon)-\chi(k\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{m}{2}\left[\frac{\chi(k\varepsilon+\varepsilon)-\chi(k\varepsilon)}{\varepsilon}\right]^2 \right\}\Phi(\cdot\cdot\cdot,\chi(\varepsilon),\chi(2\varepsilon),\cdot\cdot\cdot)=0$$

だから、ハミルトニアンは次の様に書ける。

$$H(p;x) = Q\phi(x) + [1/(2M)]\ \Sigma_k\ [p^k - QA^k(x)]^2$$

ただし、$M = m\varepsilon\alpha^2$, $Q = m$;

$A^k(x) = \alpha(x^{k+1} - x^k)$, $\phi(x) = -[1/(2\varepsilon)]\ \Sigma_k\ (x^{k+1} - x^k)^2$ とする。

このハミルトニアンの正準方程式から p を消去すると次式が得られる。

$$\frac{d^2x^j}{d\tau^2} = \frac{1}{\varepsilon\alpha}\left(\frac{dx^{j-1}}{d\tau} - \frac{dx^{j+1}}{d\tau}\right) + \frac{2}{\varepsilon^2\alpha^2}\left[x^j - \frac{1}{2}(x^{j-1}+x^{j+1})\right]$$

物理時間 t と区別して τ を論理時間と呼びたい。この運動方程式の解は、

$$(F+G)_{jk} = \frac{1}{\varepsilon\alpha}(\delta_{j+1,k} - \delta_{j-1,k}),\quad (FG)_{jk} = \frac{1}{\varepsilon^2\alpha^2}(\delta_{j+1,k} + \delta_{j-1,k} - 2\delta_{jk})$$

で決まる行列 F,G と任意の定列ベクトル u_1,u_2 と任意定数 b,c を用いて、

$$x = \exp(-\tau G)[u_1 + b\int_c^{\tau} d\tau'\ \exp(\tau' G)\exp(-\tau' F)u_2]$$

と書けるが、F,G の具体的な形を求める事は出来なかった。運動方程式の右辺の角括弧の係数を 2k に書き換え、$x^j = x_0{}^j + kx_1{}^j + k^2x_2{}^j + \cdot\cdot\cdot$ と置いて摂動法を用いると、次の近似解が得られた。

$$\frac{dx}{d\tau} \fallingdotseq \frac{d(x_0+kx_1)}{d\tau} = a\exp\left(\frac{\tau}{\varepsilon\alpha}A\right)[A + k\varepsilon\alpha(\tau-c)B]u$$

ただし $A_{jk}=\delta_{j-1,k} - \delta_{j+1,k}$, $B_{jk}=2\delta_{jk} - \delta_{j-1,k} - \delta_{j+1,k}$ であり、u は任意の定列ベクトルであり、a,c は任意定数だ。