28aEB-11　　クレプシュゴルダン係数の解説の盲点

物理学正典　　　　　ウェブマスター　宇田雄一

A Blind Point of Explaining the Clebsch-Gordan Coefficients

Yuichi Uda

$L_i^2|e_9(j,k)\rangle = l_i(l_i+1)\hbar^2|e_9(j,k)\rangle$　(i=1,2),
$(L_1+L_2)^2|e_9(j,k)\rangle = j(j+1)\hbar^2|e_9(j,k)\rangle$,
$(L_1{}^3+L_2{}^3)|e_9(j,k)\rangle = k\hbar|e_9(j,k)\rangle$,
$L_i^2|e_8(k_1,k_2)\rangle = l_i(l_i+1)\hbar^2|e_8(k_1,k_2)\rangle$　(i=1,2),
$L_i{}^3|e_8(k_1,k_2)\rangle = k_i\hbar|e_8(k_1,k_2)\rangle$　(i=1,2)
とするとき、クレプシュゴルダン係数の求め方の説明として普通は、$\langle e_8(l_1,l_2)|e_9(l_1+l_2,l_1+l_2)\rangle=1$ から出発して漸化式を使って $\langle e_8(k_1,k_2)|e_9(j,k)\rangle$の一般項を求める方法が、説明される。しかし、この説明は論理の飛躍を含んでおり天下り的だ。$j<|l_1-l_2|$ or $j>l_1+l_2$ ならば $|e_9(j,k)\rangle$ が存在しない事、の理由が説明されていないからだ。$|l_1-l_2|\leqq j\leqq l_1+l_2$ and $-j\leqq k\leqq j$ なる (j,k) の個数と $-l_1\leqq k_1\leqq l_1$ and $-l_2\leqq k_2\leqq l_2$ なる (k_1,k_2) の個数が共に $(2l_1+1)(2l_2+1)$ に成って一致するので、$j<|l_1-l_2|$ or $j>l_1+l_2$ なる $|e_9(j,k)\rangle$ が存在しない事は次元の観点からもっともらしいが、(j,k) の個数が$(2l_1+1)(2l_2+1)$ に成るような j,k の他の範囲(※)では何故いけないのか？この点を改善するために私は、k の値を指定して k の値ごとに、$|e_9(j,k)\rangle$ が $|e_8(k_1,k_2)\rangle$ の線形結合として表される様な j,k_1,k_2 の範囲を三角不等式に依拠せず求めて行く方法を、考案した。量子力学正典の TEC-0-5-29(http://physics.aki.gs/QuantMecha/TEC-0-5-29.html)以降に、その方法が書かれている。
$(L_1+L_2)^2$ を作用させる事によって、$\Sigma_{k1+k2=k}\, a(k_1,k_2)|e_8(k_1,k_2)\rangle$ が $(L_1+L_2)^2$ の固有値 $j(j+1)\hbar^2$ に属する固有ベクトルに成る様な $a(k_1,k_2)$ および、そういう非ゼロの $a(k_1,k_2)$ が存在する様な j,k の範囲を、永年方程式を用いて求める、という方法だ。この方法では、三角不等式の一般的証明は得られないが、三角不等式は k の値ごとに確認されるはずなので、各段で成立根拠の不明な式は全く出て来ない。

※たとえば、
$[|l_1-l_2|\leqq j\leqq l_1+l_2-1$ and $-j\leqq k\leqq j]$ or $[j=l_1+l_2$ and $-j\leqq k\leqq j-1]$ or $[j=l_1+l_2+1$ and $k=0]$
という範囲に属する (j,k) の個数も $(2l_1+1)(2l_2+1)$ だ。