28aVE-1　解析力学理解における関数概念の重要性

物理学正典　　　ウェブマスター　宇田雄一
Importance of What a Function is in Analytical Dynamics
physics.aki.gs　　　Yuuichi Uda

初等力学(偏微分が登場しない場合)の学習においては、関数概念に対して、「関数」という語を「yはxの関数である」という風に使うタイプの理解をしていても、学習に支障は生じない。しかし、解析力学の理論は、関数は写像である、という認識に立脚しないと、正しく理解できない。深く考えない生徒は困らないかもしれないが、そういう生徒も、その事を知った方が良い。ただ受身で授業を聞いて分かった気に成るだけ(あるいは、理論を適用させる試験問題に答えるだけ)なら必要無くても、既成の理論を超えた新しい事を自分で能動的に考えるためには、既成の理論に対する正確な理解が必要に成るからだ。さて、例えば、ラグランジュ方程式：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}=0$$

を理解するに当たって、Lはqと$\dot{q}$とtの関数だ、という風に考えると、qと$\dot{q}$とtが独立でなくてはいけない。しかし、qも$\dot{q}$もtの関数だし、qと$\dot{q}$は$\dot{q}=dq/dt$という関係で結ばれているので、これらは独立ではないのではないか、という疑問は、注意深い学生ならほとんど誰でもが思う事だろう、と私は推測する。1組の$q,\dot{q},t$だけなら独立に選べるよ、という弁解は出来る。質問されたら大抵の先生はその様に説明するだろう。しかし、その説明では、独立と見なせる1つの見方の提示には成っていても、上記の疑問の独立ではないとする論法に対する直接的論駁には成っていないので、疑問と対案の並立による葛藤を経た後に、「何かがおかしい」と感じる学者としての大事な感性を自ら鈍化させて対処する、というありがちな負の学習を、学生がしてしまう、という事が懸念される。さらに、qと$\dot{q}$とtが独立だからラグランジュ方程式が成り立つ、のでもない。関数は写像である、との認識に立脚すれば、次の様に成る。Lは行ベクトル(x,y,z)を数L(x,y,z)に写す写像である。関数Fと関数Gを

$$F(x,y,z)\equiv\frac{\partial L(x,y,z)}{\partial x}\ ,\qquad G(x,y,z)\equiv\frac{\partial L(x,y,z)}{\partial y}$$

によって定義すると、ラグランジュ方程式とは

$$\frac{d}{dt}G(q(t),\frac{dq(t)}{dt},t)-F(q(t),\frac{dq(t)}{dt},t)=0$$

の事である。ここで、FとGはもちろん写像であり、x,y,zがどんな数(簡単のために次元を省略する)であっても、Fは行ベクトル(x,y,z)を数F(x,y,z)に写し、Gは行ベクトル(x,y,z)を数G(x,y,z)に写す。見ての通り、xに代入されるものとyに代入されるものとtに代入されるものが互いに独立である必要は無い。この様な理屈を、そういう事を詮索しても何も新しい物理は出て来ない無用の過ぎた理屈だ、と批判するタイプの先生が居る。しかし、上に述べた様に、基礎理論に関して根本的に新しい事を独自に考え出すためには、こういう事こそが大切だ。それを避けて通っても学者に成れ学者としてやって行けるかもしれないが、自分とは違うタイプの学問を志す学生の芽を摘むのは間違った態度(悪意に基づいてではなく無理解によるとしても、あまりにお粗末)だ。