20aRA-1　密度を積分すると質量に成るのは何故か（3 次元の場合）

ライブレッスンカルチャースクール　　　講師　宇田雄一

How to justify integrating 3D-density for obtaining mass

Live lesson culture school　　　Yuuichi Uda

x-y-z 空間内に有限の大きさの連続体があるとする。この連続体の点(x,y,z)での密度をρ(x,y,z)とし、全質量を M とするとき、

$$M=\int dx\int dy\int dz\ \ \rho(x,y,z)$$

である事が、大学の物理学では当然の事として初年次から頻出する。しかし、これは、高大接続の不連続性の一例であって、高校の数学から見れば論理の飛躍であるし、大学の数学でも、その飛躍を埋める事は為されない。私も、10 代の頃に疑問に思って以来、本件の発表の準備をするまでは、この飛躍をキチンと埋める事を実は一度もした事が無い。不定積分を用いた定積分計算でグラフの面積を求める事は、高校数学でやるが、高校ではその理由を習わない。理由部分は大学の数学で微積分学の基本定理として習う。しかし、それは 1 次元の場合つまり積分変数が 1 つの場合だけであり、多重積分については全く言及されない。そこで、多重積分について、微積分学の基本定理に相当するもの（不定積分を用いた定積分の意味で密度の積分が質量に成る事）の証明を、今回は発表する。その際には、1 次元の場合の微積分学の基本定理は、既成事実として利用する事にする。証明において問題に成るのは次の点である。件の連続体を z＝const.面群でスライスしたときに、各面には、それを z で積分すると M に成る様な、線密度様の量が対応する。その量をσ(z)とする。さらに、z＝const.面上の y＝const.線群を考える。各線には、それを y で積分するとσ(z)に成る様な量が対応する。その量をμ(y,z)とする。一方、密度ρ(x,y,z)の定義としては、点(x,y,z)を内部に含む体積⊿V の立方体の質量を⊿V で割って極限⊿V→0 を取ったもの、を採用する。証明すべきは、

$$\mu(y,z)=\int dx\,\rho(x,y,z)$$

である。実は、この講演概要を執筆している現時点では、私は、まだ証明をやっていない。発表当日までにはやるつもりだが、図解的なもので勘弁していただく事に成ると思う。大学の数学の授業における微積分学の基本定理の証明のような厳密な証明を、考えているわけではない。