28pSL-11 # 新文法版シュレディンガー方程式

宇田英才教室　　　　　　　　　教室主　宇田雄一
New grammar version of Schrodinger equation
Uda’s School　　　　　　　　　　Yuuichi Uda

自由度１の系について、既存の量子力学で時刻 t における系の状態が波動関数 ψ(□,t)で表されるような量子歴史を、

$$\Phi[\chi]=\exp[\alpha\int dt\,\phi(\chi(t),t)]\;;\;\psi(x,t)=\exp\phi(x,t)\cdots\text{※}$$

なる汎関数Φで表す、という新文法において、Φに対して課される方程式を見つけたい。手がかりとしては、※が成立する特別な場合には、Φに対するその方程式が ψ に対する通常のシュレディンガー方程式に帰着するように、Φに対する方程式を選ぶ、という方針がもっともらしい。この方針に従って私は以下の方程式を試作してみた。

$$(ih/2\pi\alpha)\lim_{\varepsilon\to 0}(1/\varepsilon)(\Phi[\chi']-\Phi[\chi])$$
$$=\int dt\,[(1/2m)(-ih/2\pi\alpha)^2(\delta/\delta\chi(t))^2+V(\chi(t))]\Phi[\chi]$$

ただし、$\chi'(t)=\chi(t-\varepsilon)$である。

この方程式が※という特別な場合に常に ψ に対するシュレディンガー方程式に帰着するかどうかは未確認だ。また、調和振動子の定常基底状態に相当するものを調べてみて、若干の否定的な結果も得られている。それは、V として $V(x)=kx^2-(h/4\pi\alpha)\delta(0)\sqrt{k/m}$ を選んだ場合に、解として $\Phi[\chi]=\exp[\alpha\int dt\,(-\pi/h)\sqrt{mk}(\chi(t))^2]$ が得られる、という結果だ。ポテンシャルエネルギーに任意の定数を加えても取り扱っている物理系は変わらないから構わないのかもしれないが、δ 関数のゼロ点での値 $\delta(0)$ が現れてしまう事は、最悪の場合理論の破綻を意味するかもしれない。$V(x)=kx^2$ とするためには、実定数 E を使って形式的に $\Phi[\chi]=\exp[\alpha\int dt[-iEt-(\pi/h)\sqrt{mk}(\chi(t))^2]]$ とするだけで良いと思われる。しかし、この場合にも E が $\delta(0)$ を含むであろうし、積分 $\int dt[-iEt]$ は良く定義されていないかまたはゼロだと考えられるので、批判の余地がある。これらの問題を解決する方法の１つとして、$\chi'(t)=\chi(t-\varepsilon)$ を別のものに変更する事が考えられる。たとえば、$t<a$ と $t>b$ では $f(t)=t$ と成る様な任意関数 f を使って $\chi'(t)=\chi(f(t))$ とし、ハミルトニアンに当たる部分もそれに合わせて改良するとか。$\phi(x,t)$ は無次元なのに $\psi(x,t)$ は(長さ)^(－3/2)の次元を持つという批判は、次元を持つ因子 β を使って $\psi(x,t)=\beta\exp\phi(x,t)$ とするだけで回避され得る。