３０ｐＳＣ－８　　　　ガウスの法則を補完する３つの法則

宇田英才教室　　　　　　教室主　宇田雄一

Three Laws which complement Gauss's Law

Uda's Special School　　　　　　　　Yuichi Uda

ガウスの定理によれば、

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial y} g(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial z} h(x,y,z)$$
$$=Q\,\delta(x-a)\,\delta(y-b)\,\delta(z-c)$$

ならば、

$$Q=\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^2\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\ (\sin\theta)[$$
$$(\sin\theta)(\cos\phi)f(a+\varepsilon(\sin\theta)(\cos\phi),b+\varepsilon(\sin\theta)(\sin\phi),c+\varepsilon(\cos\theta))$$
$$+(\sin\theta)(\sin\phi)g(a+\varepsilon(\sin\theta)(\cos\phi),b+\varepsilon(\sin\theta)(\sin\phi),c+\varepsilon(\cos\theta))$$
$$+(\cos\theta)h(a+\varepsilon(\sin\theta)(\cos\phi),b+\varepsilon(\sin\theta)(\sin\phi),c+\varepsilon(\cos\theta))]$$

だから、マクスウェル方程式：

$$\nabla\times\mathrm{H}-\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{D}=\mathrm{q}\,\dot{\mathrm{z}}(t)\,\delta^3(x-\mathrm{z}(t))$$

のうちの１つの成分：

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{H}^3(x,y,z,t)-\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{H}^2(x,y,z,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{D}^1(x,y,z,t)$$
$$=\mathrm{q}\,\dot{\mathrm{z}}^1(t)\,\delta(x-\mathrm{z}^1(t))\,\delta(y-\mathrm{z}^2(t))\,\delta(z-\mathrm{z}^3(t))$$

に関して、ｘを固定し、

$f(t,y,z)=-\mathrm{D1}(x,y,z,t)$，　$g(t,y,z)=\mathrm{H3}(x,y,z,t)$
$h(t,y,z)=-\mathrm{H2}(x,y,z,t)$，　$x-\mathrm{z1}(a)=0$，　$b=\mathrm{z2}(a)$，$c=\mathrm{z3}(a)$
と置けば、

$$\dot{\mathrm{z}}^1(t)\,\delta(x-\mathrm{z}(t))=sgn[\dot{\mathrm{z}}^1(a)]\,\delta(t-a)$$
$$\mathrm{Q}=\mathrm{q}\,sgn[\dot{\mathrm{z}}^1(a)]$$

と考えてガウスの定理を適用できる。マクスウェル方程式の他の２つの成分についても同様の事が言える。ここで述べたアイデアに従って、曲がった時空の上での一般のゲージ場に対する類似の積分法則を求める事がおそらく出来るであろう。電磁場については僕が既にそれをやった。